第2超局所解析と波の回析(偏微分方程式の解に対する正則性と特異性の定量的評価に関する研究)

数理解析研究所講究録 1242 巻 2002 年 1-15

第2超局所解析と波の回折

森岡 達史　　阪大 理　　(Tatsushi MORIOKA)

Abstract.
In this note, we explain the summary of the second microlocalization by Lebeau. By applying the second microlocalization, we can observer the amplitude of the light diffracted by a strictly convex obstacle.

§0. 序.

余接束上で偏微分方程式の構造を局所的に解析する手法を超局所解析という。余接束上で考察することにより、方程式を標準形に帰着して解くことが可能になる。一方で、偏微分方程式は現象を記述する数学として現れる。そこで、方程式を標準形に帰着して解く方法を波に適用すると何がいえるのか問題となる。偏微分方程式に支配される現象としては、古典的な波以外に熱、物質波等があるが、有限伝播性をもつことから、古典的な波への適用を考えることは基本的であるといえる。この問題に関して、Lebeau [3] は狭義凸な障害物により光が回折する現象において、影の部分における光の強さを理論的に評価できることを示した。

光のふるまいを数学により観測しようとすると、波動方程式の漸近解を構成することが必要になる。漸近解を構成するとき、あらかじめその形を定めてから Eikonal 方程式と輸送方程式を解くのが従来の方法である。解の形を先に決める以上、それが本当に正しいかどうかは実際に方程式を解いてみるまではわからないのが注意すべき点である。狭義凸な障害物により光が回折する現象を考えるとき、従来の方法を適用すると、影の部分における解のふるまいは誤差項の中に埋込まれてしまう。そこで、誤差項から主要項をとり出すことが必要になる。このとき、先に決めた解の漸近形は適切かどうかという問題が生ずる。Grazing ray の近傍における漸近解の各項を定める輸送方程式は複雑なので、この問題を直接考察するのは困難である。そこで方程式を標準形に帰着して解く方法が必要になる。

行列の場合、標準形の構成は行列が作用するベクトル空間の基底のとりかえによりなされる。これは、ベクトル空間の線型構造を保つ変換になっている。偏微分方程式を標準形にする場合、余接束の symplectic 構造がベクトル空間の線型構造に相当する。余接束の symplectic 構造を保つ座標のとりかえを正準変換という。偏微分作用素が実際に作用するのは基底空間上の関数空間なので、正準変換を作用素の変換に

翻訳することが必要になる。この翻訳作業を量子化という。佐藤 - 河合 - 柏原は余接束上に Microfunction の層を定義し、そこで正準変換の量子化が可能であることを示した。 Egorov, Hörmander は Fourier 積分作用素とその相関数の幾何により正準変換の量子化を実現した。Sjöstrand [4] は複素相関数をもつ Fourier 積分作用素を用いて、Microfunction の層（ Sjöstrand 空間）において正準変換の量子化を行う理論を確立した。 ここで用いられるFourier 積分作用素は FBI 変換とよばれる。FBI 変換は、佐藤 - 河合 - 柏原の理論におけるスペクトル写像の役割をする。FBI 変換による distibution の像は複素領域上の正則関数になっているが、相関数の幾何により、複素領域を余接束と規準的に同一視できる点が重要である。Lebeau [2] は余接束の等方的部分多様体から規準的に定まる symplectic 多様体 (Éclaté) を考察し、余接束からこの symplectic 多様体への symplectic 同型写像を FBI 変換により量子化した。この操作を等方的部分多様体上における第 2 超局所化とよぶ。影の部分における光のふるまいを考察するとき、方程式の標準形を余接束上の Microfunction の層において構成できないことが問題となる。 そこで、部分正則性 (Cf. 柏原) を Module としてとることが必要になる。部分正則性 を Module とする解析は、第 2 の parameter を導入することによりなされる。Éclaté は、この第 2 の parameter の幾何を表しているといえる。Lebeau [3] は第 2 超局所化を波動方程式に適用し、後で記述する境界値問題 (1) に対する Dirichlet - Neumann 作用素は、Glancing 領域の conormal 束上の Microfunction の層に作用する第 2 超局所作用素として楕円型であり、余接束上の Microfunction の層に作用する unilateral 作用素として Gevrey 3 の局所性をもつことを示した。[3] における解析から次のような結論が得られる。

狭義凸な障害物に接する方向から光が入射したとする。このとき、入射点から障害物の測地線に沿って伝わる光が現れる。光の伝わる測地線において、観測点を入射点の近くでひとつ固定する。このとき、観測点における光の強さは、もとの強さの $\exp(-C\lambda^{1/3})$ 倍になる。ここで、λ は障害物に入射する光の周波数、 C は λ に独立な正の数である。

[3] の解析を弾性波に適用することにより得られる結果 [森岡] を述べておく。

ある種の物体に力を加えると変形するが、力を加えるのをやめるともとにもどる。このような性質を弾性という。弾性をもつ物体を弾性体とよぶ。弾性波とは、弾性体を伝わる波のことをいう。波の媒質のもとの状態からのずれを変位とよぶ。変位

と進行方向とが互いに平行な波を縦波といい、垂直な波を横波という。弾性体が等方性をもつ場合、そこを伝わる弾性波は一般に縦波と横波の重合わせになっている。

縦波と横波について、それぞれの進行方向に対する変位の自由度を考えてみる。縦波の変位は進行方向に対して一意的に定まるので、変位の自由度は無いといえる。一方、横波の変位は進行方向に対して２次元の自由度を持っている。そこで、横波については、偏りが問題になる。ここで、波が偏りをもつとは、その変位が特定方向に集中していることをいう。

一般に波が障害物に当たると反射が起こる。弾性波の場合、入射波が縦波または横波のみであっても、一般には反射波として縦波と横波の両方が現れる。このように、波の種類が変わる現象を Mode の変換とよぶ。

等方性をもつ弾性体の内部に狭義凸な障害物が存在すると仮定する。 障害物の境界上の一点を固定する。 ある方向からこの点に周波数の高い横波が斜めに入射すると、Mode の変換により、縦波が障害物に接する方向に現れて回折が起こる。さらに、障害物の境界を伝わる縦波にMode の変換が起こって、障害物の境界から弾性体の内部に向かって伝播する横波が現れる。障害物の境界を伝わる弾性波を単に表面波とよぶことにする。今の場合、回折により現れる表面波は、縦波と横波の重合わせになっている。この現象において、障害物に入射する横波が偏っていると仮定する。このとき、入射点の近くで次が成り立つ。

1. 回折により現れる表面波は偏りをもつ。
2. その偏りの方向は、入射波の偏りの方向に依存して定まる。

本稿では、Lebeau [2] に従って第２超局所解析の理論的な枠組みを説明する。§1 では、symplectic 幾何に関して必要となる予備知識を整理した。 §2 では、余接束の等方的部分多様体から規準的に定まる symplectic 多様体 (Éclaté) について説明した。 §3 では、第２超局所解析に現れる考え方について、その概略を述べた。

最後に、狭義凸な障害物による光の回折の定式化について述べる。 考える方程式は次のようになる。

$$(1)\qquad \begin{cases} \Box u = 0 \qquad \text{in } \ \mathbf{R}\times\Omega \\ u\,|_{\mathbf{R}\times\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$$\Box = \partial_t^2 - \triangle \quad \text{in} \quad \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3,$$

$$\Omega \subset \mathbf{R}_x^3 \quad : \quad \text{外部領域。}$$

Ωについては次を仮定する。

(H.1) $\partial\Omega$ は解析的である。

(H.2) $\mathbf{R}^3 \backslash \Omega$ は strictly convexである。

定理を記述するために、いくつかの記号を準備する。

<u>記号</u>.

$N = \mathbf{R} \times \partial\Omega \quad \triangle_{\partial\Omega}$: $\partial\Omega$ 上のLaplacian。

$\sigma(\triangle_{\partial\Omega})$: $\triangle_{\partial\Omega}$ の主表象。

$q \in C^\infty(T^*N\,,\, \mathbf{R})$: $q(\tau, \beta) = -\tau^2 - \sigma(\triangle_{\partial\Omega})(\beta)$, $\tau \in \mathbf{R}$,

$\beta \in T^*(\partial\Omega)$ により定義される関数。

π : T^*N からN への射影。

$\rho \in T^*N \backslash 0$: $q(\rho) = 0$, $\pi(\rho) = (0, z)$, $z \in \partial\Omega$ を満たす固定された点。

γ : $\gamma(s) = \exp\, sH_q(\rho)$ により定義されるT^*N 内の曲線（零陪特性帯）。

$\partial/\partial n$: $\partial\Omega$ の法線方向に沿った微分。

m : $1 \le m < 3$を満たす固定された実数。

$WF_A(*)$: 解析的波面集合。

$WF_G^k(*)$: Gevrey k 級波面集合。

定理１．（*Lebeau [3]*）　*(H.1)* と *(H.2)* が成り立つと仮定する。$0 < s_0 < s_1$, s_1 は十分小、 $\omega_0 \subset T^*N \backslash 0$, $\rho \in \omega_0$, ω は十分小、 $WF_A(g) \subset \omega_0$, u は *(1)* の *outgoing* 解とする。このとき、次の *(i)* , *(ii)* が成り立つ。

(i) $\gamma([s_0\,,\, s_1]) \cap WF_G^3((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$.

(ii) $\gamma([s_0\,,\, s_1]) \cap WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$ または

$\gamma([s_0\,,\, s_1]) \subset WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N)$ が成り立つ。

§1 Symplectic 幾何の復習.

W は有限次元の実ベクトル空間、 σ は $W \times W$ から $\mathbf{R}$ への実双線型写像とする。

定義 1.1. σ が非退化であるとは、次が成り立つことをいう。

$a \in W$, 任意の $b \in W$ に対して $\sigma(a, b) = 0$ ならば、$a = 0$ である。

定義 1.2. σ が歪対称であるとは、任意の a , $b \in W$ に対して、$\sigma(a,b) = -\sigma(b,a)$ が成り立つことをいう。

定義 1.3. (W, σ) が *symplectic* ベクトル空間であるとは、 σ が歪対称かつ非退化であることをいう。

(W, σ) は symplectic ベクトル空間とする。 W の部分集合 A に対して、$A^{\perp} = \{ a \in W \ : \ \sigma(a,b) = 0, \quad {}^{\forall} b \in A \}$ と定義する。

定義 1.4. A は W の部分空間とする。
(i) Aは等方的である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subset A^{\perp}$
(ii) Aは包合的である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \supset A^{\perp}$
(iii) Aは *lagrangian* である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A = A^{\perp}$
(iv) Aは *symplectic* である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sigma|_A$ は A 上非退化である。
ここで、$\sigma|_A$ は σ の $A \times A$ への制限を表す。

N は実解析的多様体、θ は N の2形式（すなわち、2次の微分形式）とする。

定義 1.5. (N, θ) が *symplectic* 多様体であるとは、 次の *(i), (ii)* が成り立つことをいう。
(i) 任意の $a \in N$ に対して、 θ_a は $T_a N$ で非退化である。
(ii) $d\theta = 0$ が成り立つ。

(N, θ) は symplectic 多様体、 Γ は N の部分多様体とする。

定義 1.6. Γ が N の *[* 等方的、包合的、*Lagrange, symplectic]* 部分多様体であるとは、任意の $a \in N$ に対して、 $T_a\Gamma$ は *symplectic* ベクトル空間 $(T_a N, \theta_a)$ において、それぞれ、 *[* 等方的、包合的、*lagrangian, symplectic]* であることをいう。

N から $\mathbf{R}^n$ への実解析的関数全体の集合を $C^{\omega}(N, \mathbf{R}^n)$ で表す。 N 上の可微分写像 χ が与えられたとき、 χ の引戻しを χ^* で表す。

定義 **1.7.** χ は N 上の可微分同型写像 とする。 χ が正準変換であるとは、 $\chi^*\theta = \theta$ が成り立つことをいう。

$f \in C^\omega(N, \mathbf{R})$ が与えられたとする。 このとき、N 上のあるベクトル場 H_f が一意的に存在して、 $\langle df, *\rangle_{T^*N\times TN} = \theta(*, H_f)$ が成り立つ。 H_f を f の Hamilton ベクトル場とよぶ。 定義より、H_f の積分曲線上において f は定数 であることがわかる。 f の零点を通る H_f の積分曲線を f の零陪特性帯とよぶ。

$f, g \in C^\omega(N, \mathbf{R})$ に対して $\{f, g\} = H_f g$ と定義する。 $\{f, g\}$ を f と g の Poisson bracket とよぶ。

補題 **1.1.** 次が成り立つ。
(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad {}^\forall f, g \in C^\omega(N, \mathbf{R})$
(ii) $\{\{f, g\}, h\}+\{\{g, h\}, f\}+\{\{h, f\}, g\} = 0, \quad {}^\forall f, g, h \in C^\omega(N, \mathbf{R})$
(iii) $[H_f, H_g] = H_{\{f, g\}}, \quad {}^\forall f, g \in C^\omega(N, \mathbf{R})$

補題 **1.2.** V は N の部分多様体とする。次の *(i), (ii)* は同値である。
(i) V は N の包合的部分多様体である。
(ii) $f, g \in C^\omega(N, \mathbf{R}),\ f|_V = g|_V = 0$ ならば $\{f, g\}|_V = 0$ が成り立つ。

$\dim N = 2n,\quad x \in C^\omega(N, \mathbf{R}^n),\quad \xi \in C^\omega(N, \mathbf{R}^n)$ とする。 さらに、(x,ξ) は N の実解析的座標になっているとする。

定義 **1.8.** (x,ξ) が N の正準座標であるとは、 $\theta = \sum_{k=1}^{n} d\xi_k \wedge dx_k$ が成り立つことをいう。

$f \in C^\omega(N, \mathbf{R}),\ (x,\xi)$ は N の正準座標とする。 H_f を (x,ξ) を用いて表すと次のようになる。

$$H_f = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right) \tag{1.1}$$

H_f の積分曲線を γ で表す。$\gamma(t)=(x(t),\xi(t))$ とする。このとき、$(x(t),\xi(t))$ は常微分方程式

$$
\begin{cases} \dot{x}(t)=(\nabla_\xi f)(x(t),\xi(t)) \\ \dot{\xi}(t)=-(\nabla_x f)(x(t),\xi(t)) \end{cases} \tag{1.2}
$$

の解になっている。

M は実解析的多様体、$G=T^*M$, π は G から M への射影とする。G 上の 1 形式 α を、

$$
\langle \alpha, \varphi\rangle_{T^*_\rho G\times T_\rho G}=\langle r, \pi_*\varphi\rangle_{T^*_\kappa M\times T_\kappa M}
$$

により定義する。ここで、$\varphi\in T_\rho G$, $\rho\in G$, $\rho=(\kappa,r)$, $\kappa=\pi(\rho)$, $r\in T^*_\kappa M$ である。

G 上の 2 形式 ω を、$\omega=d\alpha$ により定義する。

α を G の正準 1 形式、ω を G の正準 2 形式とよぶ。

$\dim M=n$, $x\in C^\omega(M,\mathbf{R}^n)$ は M の実解析的座標であるとする。このとき、各 $\kappa\in M$ に対して、$T^*_\kappa M=\langle dx_1,\dots,dx_n\rangle$ となっている。$T^*_\kappa M$ の元は基底 $\{dx_k\}_{k=1}^n$ の 1 次結合で表される。このことから定まるG の座標を (x,ξ) と書くことにする。α, ω の座標 (x,ξ) による 表示は、

$$
\alpha=\sum_{k=1}^n \xi_k\,dx_k\,,\qquad \omega=\sum_{k=1}^n d\xi_k\wedge dx_k \tag{1.3}
$$

となる。(1.3) より、ω は非退化である。また、$\omega=d\alpha$ より、$d\omega=0$ となることがわかる。従って、(G,ω) は symplectic 多様体である。(1.3) より、(x,ξ) は G の正準座標である。

$\varphi\in C^\omega(M,\mathbf{R})$ とする。M から G への可微分写像 j_φ を、$j_\varphi(x)=(x,(d\varphi)_x)$, $x\in M$ により定義する。

補題 **1.3.**

(i) j_φ は M から G への埋込みである。

(ii) $j_\varphi(M)$ は G の Lagrange 部分多様体である。

M は $\mathbf{R}^n$ の開集合、P は M 上の m 階偏微分作用素であって、

$$P = \sum_{|\beta| \le m} a_\beta D^\beta \tag{1.4}$$

と表されているとする。ここで、$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対して $D^\beta = D_1^{\beta_1} \cdots D_n^{\beta_n}$，$D_k = -i\partial/\partial x_k$，$|\beta| = \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|$ である。また、$a_\beta \in C^\omega(M, \mathbf{C})$ とする。P の主表象 $\sigma(P)$ を、

$$\sigma(P)(\rho) = \sum_{|\beta| = m} a_\beta(y)\eta^\beta, \qquad \rho = (y, \eta) \in M \times \mathbf{R}^n \tag{1.5}$$

により定義する。このとき、$\sigma(P) \in C^\omega(G, \mathbf{C})$ が成り立つ。すなわち、$\sigma(P)$ は M の座標のとり方によらずに余接束 G 上の関数を定める。特に、P が M 上の実解析的ベクトル場の場合には、

$$\sigma(P)(\rho) = i\langle r, P\rangle_{T^*_\kappa M \times T_\kappa M} \tag{1.6}$$

が成り立つ。ここで、$\rho \in G$，$\rho = (\kappa, r)$，$\kappa = \pi(\rho)$，$r \in T^*_\kappa M$ である。

§2. 等方的部分多様体の Éclaté.

M は実解析的多様体、$G = T^*M$，Γ は G の等方的部分多様体とする。また、G の正準 2 形式を ω で表わす。G における可微分曲線の集合 E を、

$$E = \{\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}, G) \;:\; \gamma(0) \in \Gamma,\ \dot\gamma(0) \in (T\Gamma)^\perp\}$$

により定義する。$\gamma_1, \gamma_2 \in E$ とする。

定義 **2.1.** $\gamma_1 \sim \gamma_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の *(i)* – *(iii)* が成立。
(i) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$
(ii) ${}^\forall f \in C^\infty(G, \mathbf{R})$，$f|_\Gamma = 0$，
$f \circ \gamma_1(s) - f \circ \gamma_2(s) = O(s^2)$，$s \to 0$
(iii) ${}^\forall f \in C^\infty(G, \mathbf{R})$，$f|_\Gamma = 0$，$H_f|_\Gamma \in T\Gamma$，
$f \circ \gamma_1(s) - f \circ \gamma_2(s) = O(s^3)$，$s \to 0$

定義 **2.2.** $\widetilde{\Gamma} = E/\sim$ と定義する。$\widetilde{\Gamma}$ を Γ の *Éclaté* とよぶ。

以下、$M = \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, $\dim \Gamma = 1$ と仮定する。

定義 **2.3.** $(x\,,\xi)$ は G の正準座標とする。$(x\,,\xi)$ が Γ に適合した G の座標であるとは、$|b'| = 1$ をみたすある $b' \in \mathbf{R}^{n-1}$ が存在して、

$$\Gamma = \{\,(x,\xi) \in G\,:\, x_1 \in \mathbf{R},\;\; x' = 0,\;\; \xi_1 = 0,\;\; \xi' = b'\,\}$$

が成り立つことをいう。ここで、$x = (x_1, x') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ 。

以下、Γ に適合した G の座標が存在すると仮定する。Γ に適合した G の座標 $(x\,,\xi)$ をひとつ固定する。$\gamma_1\,,\ \gamma_2 \in E$ とする。

補題 **2.1.** $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow$ 次の *(i) – (iii)* が成立。
(i) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$
(ii) $\dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0) \in T\Gamma$
(iii) $\ddot{\gamma}_1(0) - \ddot{\gamma}_2(0) \in (T\Gamma)^{\perp}$

$\widetilde{\Gamma}$ から $\mathbf{R}^{2n}$ への写像 $(y\,,\eta)$ を、

$$\begin{aligned}
&y_1(\widetilde{\gamma}) = (x_1 \circ \gamma)(0)\,, \qquad y_k(\widetilde{\gamma}) = (d/ds)(x_k \circ \gamma)(s)\,|_{s=0}\;, \\
&\eta_1(\widetilde{\gamma}) = \frac{1}{2}(d/ds)^2(\xi_1 \circ \gamma)(s)\,|_{s=0}\;, \\
&\eta_k(\widetilde{\gamma}) = (d/ds)(\xi_k \circ \gamma)(s)\,|_{s=0}\;, \\
&1 \leq k \leq n\,, \quad \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}, \quad \gamma \in E\,:\, \widetilde{\gamma} \text{ の代表}\;, \\
&y = (y_1\,, \ldots, y_n)\,, \quad \eta = (\eta_1\,, \ldots, \eta_n)
\end{aligned}$$

により定義する。

補題 **2.2.** $(y\,,\eta)$ は $\widetilde{\Gamma}$ から $\mathbf{R}^{2n}$ への全単射である。

補題 2.2より、$(y\,,\eta)$ は $\widetilde{\Gamma}$ に実解析的可微分構造を定める。

$\Psi \in C^{\infty}(\mathbf{R}\,, TG)$ が与えられたとき、$\Psi(s) = (\gamma(s)\,, v(s))$ と表すことにする。ここで、$\gamma(s) \in G$, $v(s) \in T_{\gamma(s)}G$ である。

定義 2.4. 次の *(i)*, *(ii)* をみたす $\Psi \in C^\infty(\mathbf{R}, TG)$ の 全体の集合を F で表す。
(i) $\gamma \in E, \quad v(0) \in T\Gamma$
(ii) ${}^\forall f \in C^\infty(G, \mathbf{R})$; $f\,|_\Gamma = 0, \quad H_f\,|_\Gamma \in T\Gamma$ に対して
$\langle (df)_{\gamma(s)}, v(s)\rangle_{T^*_{\gamma(s)}G \times T_{\gamma(s)}G} = O(s^2)$, $s \to 0$ が成り立つ。

定義 2.5. F から $\mathbf{R}$ への写像 α_0 を、
$\alpha_0(\Psi) = \lim_{s\to 0} \dfrac{1}{2s}\omega(\dot\gamma(s), v(s))$, $\Psi \in F$ により定義する。

補題 2.3. 任意の $\Psi \in F$ に対してある $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t, G)$ が存在して、 次の *(i)* – *(iii)* が成立する。
(i) $\varphi(s, 0) = \gamma(s), \quad (\partial\varphi/\partial t)(s, t)\,|_{t=0} = v(s), \quad {}^\forall s \in \mathbf{R}$
(ii) $\varphi(*, t) \in E, \quad {}^\forall t \in \mathbf{R}$
(iii) $[t \to \widetilde{\varphi(*, t)}] \in C^\infty(\mathbf{R}, \widetilde\Gamma)$

定義 2.6. F から $T\widetilde\Gamma$ への写像 h を、$h(\Psi) = \dot\beta(0), \quad \Psi \in F, \quad \beta(t) = \widetilde{\varphi(*, t)}$ により定義する。 ここで、φ は補題 *2.3* の *(i)* – *(iii)* をみたす $C^\infty(\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t, G)$ の元である。

補題 2.4. h は F から $T\widetilde\Gamma$ への全射である。

補題 2.5. $\Psi_k \in F, \quad k = 1, 2$ とする。 $h(\Psi_1) = h(\Psi_2)$ ならば $\alpha_0(\Psi_1) = \alpha_0(\Psi_2)$ が成り立つ。

定義 2.7. $\widetilde\Gamma$ 上の 1 形式 $\widetilde\alpha$を、 $\langle\widetilde\alpha, \widetilde\Psi\rangle_{T^*\widetilde\Gamma \times T\widetilde\Gamma} = \alpha_0(\Psi), \quad h(\Psi) = \widetilde\Psi$ により定義する。 また、$\widetilde\Gamma$ 上の 2 形式 $\widetilde\omega$を、 $\widetilde\omega = d\widetilde\alpha$ により定義する。 $\widetilde\alpha$ を $\widetilde\Gamma$ の正準 1 形式、 $\widetilde\omega$ を $\widetilde\Gamma$ の正準 2 形式とよぶ。

補題 2.6.
(i) $\widetilde\omega$ は $\widetilde\Gamma$ で非退化である。
(ii) $d\widetilde\omega = 0$ が成り立つ。

補題 2.6より、$(\widetilde\Gamma, \widetilde\omega)$ は symplectic 多様体である。

(y, η) を (x, ξ) により定まる $\widetilde\Gamma$ の座標とする。 ここで、(x, ξ) は Γ に適合した G の座標である。

補題 **2.7.** 次が成り立つ。

(i) $\widetilde{\alpha} = \eta_1 dy_1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\eta_k\, dy_k - y_k\, d\eta_k)$

(ii) $\widetilde{\omega} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d\eta_k \wedge dy_k$

補題 2.7 の (ii) より、 $(y\,,\eta)$ は $\widetilde{\Gamma}$ の正準座標である。

定義 **2.8.** $\mathbf{R}_+$ の $\widetilde{\gamma}$ への作用 $\widetilde{K}$ を、 $\widetilde{K}_t\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma(t\cdot *)}$, $t>0$ により定義する。ここで、$\widetilde{\gamma}$ は $\gamma \in E$ を代表元とする $\widetilde{\Gamma}$ の元である。

補題 **2.8.** 任意の $t>0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $(\widetilde{K_t})^*\widetilde{\alpha} = t^2\,\widetilde{\alpha}$

(ii) $(\widetilde{K_t})^*\widetilde{\omega} = t^2\,\widetilde{\omega}$

$\widetilde{K_t}$ の座標による表示は次のようになる。

補題 **2.9.** $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{\gamma} = (p\,, q)$, $t>0$ とする。このとき、
$\widetilde{K_t}\widetilde{\gamma} = (p_1\,, tp'\,; t^2 q_1\,, tq')$ が成り立つ。ここで、 $p = (p_1\,, p') \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$,
$q = (q_1\,, q') \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$ である。

$T^*\Gamma$ から $\widetilde{\Gamma}$ への写像 j を次のように 定義する。 $\kappa \in \Gamma$, $\theta \in T^*_\kappa\Gamma$ が 与えられたとする。 $q\,|_{T_\kappa\Gamma} = \theta$ をみたす $q \in T^*_\kappa G$ を固定する。 $(dg)_\kappa = q$ をみたす $g \in C^\infty(G\,, \mathbf{R})$ を固定する。

補題 **2.10.** ある $\gamma \in E$ が存在して、次の *(i), (ii)* が成り立つ。

(i) $\gamma(0) = \kappa$, $\dot{\gamma}(0) = 0$

(ii) ${}^\forall f \in C^\infty(G\,, \mathbf{R})$, $f\,|_\Gamma = 0$, $H_f\,|_\Gamma \in T\Gamma$,

$f\circ\gamma(s) = \dfrac{1}{2}s^2\{f\,, g\}(\kappa) + O(s^3)$, $s \to 0$

定義 **2.9.** $\kappa \in \Gamma$, $\theta \in T^*_\kappa\Gamma$ に 対して、$j(\theta) = \widetilde{\gamma}$ と定義する。ここで、 $\gamma \in E$ は補題 *2.10* の *(i), (ii)* をみたす γ, $\widetilde{\gamma}$ は $\gamma \in E$ を代表元とする $\widetilde{\Gamma}$ の元である。

$T^*\Gamma$ の正準 1 形式を α_Γ , 正準 2 形式を ω_Γ で表す。

補題 2.11. 次が成り立つ。
(i) j は $T^*\Gamma$ の $\widetilde{\Gamma}$ への埋込みである。
(ii) $j^*\widetilde{\alpha} = \alpha_\Gamma$
(iii) $j^*\widetilde{\omega} = \omega_\Gamma$

$\mathbf{R}_+$ の $T^*\Gamma$ への作用を K で表わす。

補題 2.12. 任意の $t > 0$ に対して $\widetilde{K}_t \circ j = j \circ K_{t^2}$ が成り立つ。

写像 j を座標で表示すると次のようになる。

補題 2.13. $(m\,,\,\mu) \in T^*\Gamma$ とする。このとき、$j(m\,,\,\mu) = (m, 0, \ldots 0\,;\, \mu, 0, \ldots, 0)$ が成り立つ。

Γ から $\widetilde{\Gamma}$ への写像 ι を次のように定義する。$\kappa \in \Gamma$ が与えられたとする。$\gamma(s) = \kappa$, ${}^\forall s \in \mathbf{R}$ をみたす $\gamma \in C^\infty(G\,,\mathbf{R})$ をとる。このとき、$\gamma \in E$ が成り立つ。$\iota(\kappa) = \widetilde{\gamma}$ と定義する。ここで、$\widetilde{\gamma}$ は $\gamma \in E$ を代表元とする $\widetilde{\Gamma}$ の元である。
Γ の $T^*\Gamma$ への、零断面としての埋込みを $\mathcal{O}$ で表わす。

補題 2.14.
(i) ι は Γ の $\widetilde{\Gamma}$ への埋込みである。
(ii) $j \circ \mathcal{O} = \iota$ が成り立つ。

定義 2.10. $\widetilde{\Gamma}$ から Γ への写像 $\widetilde{\pi}$ を、$\widetilde{\pi}(\widetilde{\gamma}) = \gamma(0)$, $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ により定義する。ここで、$\gamma \in E$ は $\widetilde{\gamma}$ の代表元である。$\widetilde{\pi}$ を $\widetilde{\Gamma}$ の Γ への射影とよぶ。

$T^*\Gamma$ から Γ への射影を π_Γ で表す。

補題 2.15.
(i) $\widetilde{\pi}$ は $\widetilde{\Gamma}$ から Γ への全射である。
(ii) $\widetilde{\pi} \circ \iota = id_\Gamma$ が成り立つ。
(iii) $\widetilde{\pi} \circ j = \pi_\Gamma$ が成り立つ。

$\kappa \in \Gamma$ とする。$(\widetilde{\Gamma})_\kappa \subset \widetilde{\Gamma}$ を、$(\widetilde{\Gamma})_\kappa = \widetilde{\pi}^{-1}\{\kappa\}$ により定義する。$(\widetilde{\Gamma})_\kappa$ を $\widetilde{\Gamma}$ の κ における繊維とよぶ。定義より、$\widetilde{\Gamma} = \cup\{(\widetilde{\Gamma})_\kappa \,:\, \kappa \in \Gamma\,\}$ が成り立つ。これは、disjoint union になっている。

補題 **2.16.**
(i) 任意の $\kappa \in \Gamma$ と任意の $t > 0$ に対して $\widetilde{K_t}((\widetilde{\Gamma})_\kappa) = (\widetilde{\Gamma})_\kappa$ が成り立つ。
(ii) 任意の $t > 0$ に対して $\widetilde{K}_t \mid_{\iota(\Gamma)} = id_{\iota(\Gamma)}$ が成り立つ。

定義 **2.11.** $f \in C^\infty(G\,, \mathbf{R})\,,\ f \mid_\Gamma = 0\,,\ H_f \mid_\Gamma \in T\Gamma$ とする。 $\widetilde{f} \in C^\infty(\widetilde{\Gamma}\,, \mathbf{R})$ を、

$$\widetilde{f}(\widetilde{\gamma}) = \lim_{s \to 0} s^{-2} f \circ \gamma(s)$$

により定義する。ここで、$\gamma \in E$ は $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ の代表元である。

§3. 特異性伝播.

この節では偏微分方程式の解の解析的特異性伝播が Éclaté を通じてどのように説明されるのか、 その考え方を述べる。以下、$M = \mathbf{R}^n$, $G = T^*M$, Γ は G の等方的部分多様体とする。簡単のため、 $\dim \Gamma = 1$ と仮定する。その他の記号は §2 に従うものとする。

$u \in \mathcal{E}'(M)$ が与えられたとする。このとき、 $\widetilde{\Gamma} \backslash \iota(\Gamma)$ において u の第 2 解析的波面集合 $WF^2_{A\Gamma}\, u$ が定まる。 第 2 解析的波面集合は次のような性質をもつ。

主張 **3.1.**
(i) $WF^2_{A\Gamma}\, u$ は $\widetilde{\Gamma} \backslash \iota(\Gamma)$ において閉集合である。
(ii) 任意の $t > 0$ に対して、$WF^2_{A\Gamma}\, u$ は作用 $\widetilde{K_t}$ に関して不変である。
(iii) $\widetilde{\pi}(WF^2_{A\Gamma} u) = \Gamma \cap WF_A u$ が成り立つ。

主張 **3.2.** $\rho \in \Gamma$ とする。 次の *(i)*, *(ii)* は同値である。
(i) u は ρ で $\Gamma-$部分正則である。
(ii) $j(T^*_\rho \Gamma) \cap WF^2_{A\Gamma}\, u = \phi$ が成り立つ。

主張 **3.3.** $\Gamma_0 \subset \Gamma$, Γ_0 は連結とする。 u は Γ_0 において $\Gamma-$部分正則であると仮定する。 このとき、 $\Gamma_0 \cap WF_A u = \phi$ または $\Gamma_0 \subset WF_A u$ が成り立つ。

P は M 上の実解析的係数をもつ偏微分作用素、$p = \sigma(P)$ とする。

$$\mathrm{Char}\ P = \{\rho \in T^*M \backslash 0\ :\ p(\rho) = 0\}$$

により定まる集合 Char P を P の特性集合とよぶ。 以下、p は実数値であると仮

定義 **3.1.** P が主要型であるとは、次が成り立つことをいう。
(i) *Char* P は空集合でない。
(ii) *Char* P の各点において 正準 *1* 形式 α と dp は一次独立である。

P は主要型であると仮定する。$p = \sigma(P)$ とする。p の零陪特性帯 Γ をひとつ固定する。このとき、Γ は G の等方的部分多様体であって、$p\,|_\Gamma = 0$, $H_p\,|_\Gamma \in T\Gamma$ が成り立つ。Γ の Éclaté を $\widetilde{\Gamma}$ で表す。

補題 **3.4.** $\widetilde{p} \in C^\omega(\widetilde{\Gamma}, \mathbf{R})$ は p に対して定義 *2.11* により定まる関数とする。$\rho \in j(T^*\Gamma)$ とする。このとき、次の *(i)*, *(ii)* は同値である。
(i) $\rho \in \iota(\Gamma)$ が成り立つ。
(ii) $\widetilde{p}(\rho) = 0$ が成り立つ。

P は主要型であって、$Pu = 0$ が成り立つと仮定する。$\widetilde{\Gamma}$ において考えるとき、補題 3.4 より P は Γ で楕円型であるといえる。P が Γ で楕円型であることと $Pu = 0$ から $j(T^*\Gamma) \cap WF^2_{A\Gamma}\, u = \phi$ が従う。主張 3.2 より、u は Γ で $\Gamma-$部分正則 であることがわかる。ゆえに、主張 3.3 より、$\Gamma \cap WF_A u = \phi$ または $\Gamma \subset WF_A u$ が成り立つ。これは、$Pu = 0$ の解 u についての解析的特異性伝播にほかならない。このように、第 2 超局所化とは、作用素の特性集合の爆裂 (blow up) により、作用素が楕円型になる特定方向を取り出す操作であるといえる。

ここでは、第 2 超局所化について、その考え方の概略のみを述べた。これが理論として意味を持つためには、余接束から Éclaté への symplectic 同型写像の量子化が必要になる。これは、FBI 変換により可能になる。

第 2 解析的波面集合の定義は Lebeau [2, page 192 の定義 4.1]、$\Gamma-$部分正則性の定義は [2, page 194 の定義] において与えられている。

References

1. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz (1982–1983).
2. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **35** (1985), 145–216.
3. G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **9** (1984), 1437–1494.
4. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).